

Двудольные графы

13 июля

Определение. Граф называется *двудольным*, если его вершины можно раскрасить в два цвета правильным образом, т. е. так, чтобы любые две вершины, соединенные ребром, были покрашены в разные цвета.

1. Каждый из учащихся 6 класса знает не меньше половины учащихся 7 класса, а каждый из 7 — не больше половины 6. Докажите, что каждый из учащихся 6 класса знает ровно половину учащихся 7 класса, а каждый из 7 класса — ровно половину 6.
2. Можно ли на доске 2025×2025 расставить 825 коней, так чтобы каждый бил четырёх других?
3. У куба отмечены вершины и центры граней, а также проведены диагонали всех граней. Можно ли по отрезкам этих диагоналей обойти все отмеченные точки, побывав в каждой из них ровно по одному разу?
4. Дед Мороз принёс на ёлку мешок с подарками. Известно, что количество подарков в мешке не меньше, чем количество детей, пришедших на ёлку. Каждому ребёнку какие-то подарки понравились, а какие-то — не понравились. Всегда ли Дед Мороз сможет подарить каждому ребёнку по одному подарку так, чтобы каждый ребёнок получил подарок, который ему нравится? Решите эту задачу в следующих случаях:
 - а) Каждому ребёнку нравится ровно 2 подарка, и каждый подарок нравится не более, чем 2-м детям;
 - б) Каждому ребёнку нравится не менее 3-х подарков, и каждый подарок нравится не менее, чем 3-м детям;
 - в) Каждому ребёнку хотя бы один подарок нравится, и всем детям нравится разное количество подарков.
5. **Критерий двудольности.** Граф двудольный тогда и только тогда, когда в нем нет нечетных циклов. Докажите.
6. В каждой вершине связного графа записали число. Затем на каждом ребре записали сумму чисел в его концах, а числа в вершинах стерли. Докажите, что можно однозначно восстановить числа в вершинах тогда и только тогда, когда граф не является двудольным.
7. 38 попугаев передрались, измеряя рост удава. Каждый из них сумел выдрать одно перо из чьего-то хвоста, и у каждого попугая было выдрано одно перо. Кроме того, для любых трех попугаев можно указать четвертого, выдравшего перо у одного из них. Доказать, что для наведения порядка удав может проглотить не более 6 попугаев, а остальных рассадить поровну в две клетки так, чтобы ни один попугай не попал в одну группу со своим обидчиком.

Дополнительные задачи

8. Какое наибольшее количество ребер может быть в двудольном графе, в котором вершин а) $2n$; б) $2n + 1$?
9. В стране 20 городов, причем между любыми двумя городами проложена дорога. Министерство путей сообщения может закрыть на ремонт любую дорогу из четырех, образующих циклический маршрут. Может ли после нескольких таких операций остаться только 19 дорог?
10. В ящике лежат игрушечные котик. Голова каждого котика покрашена в один из 2025 цветов. Хвост каждого котика тоже покрашен в один из этих 2025 цветов — возможно, в тот же, что и голова, а возможно, и в другой. Набор из 2025 котиков называется *правильным*, если все их головы разного цвета и все хвосты тоже разного цвета. Известно, что в ящике можно выбрать правильный набор котиков более чем одним способом. Докажите, что можно оставить в ящике несколько котиков (возможно, всех) так, что из них правильный набор удастся выбрать ровно двумя способами.